

Adam Dąbrowski

Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Zarządzania
Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów
Pracownia Układów Elektronicznych i Przetwarzania Sygnałów

9 stycznia 2008



Zakres zagadnień

- 1 Koncepcja i proces próbkowania
- 2 Próbkowanie nieidealne
- 3 Widmo sygnału spróbkowanego
- 4 Odtworzenie sygnału ciągłego — twierdzenie o próbkowaniu
- 5 Pobieranie próbek sygnału
- 6 Widmo sygnału idealnie spróbkowanego
- 7 Reprezentacja Fouriera
- 8 Dwie interpretacje własności widma sygnału dyskretnego
- 9 Twierdzenie o próbkowaniu
- 10 Próbkowanie sygnałów pasmowych
- 11 Rekonstrukcja sygnału ciągłego

Próbkowanie

Koncepcja próbkowania

Koncepcja zamiany sygnału ciągłego w sygnał dyskretny jest prosta: sygnał ciągły transmitujemy za pośrednictwem łącznika. W chwilach, w których chcemy zarejestrować próbki sygnału, zamykamy na moment łącznik. W ten sposób są tworzone krótkie impulsy o amplitudach odpowiadających wartościom sygnału ciągłego w wybranych chwilach próbkowania. Jeśli odstępy pomiędzy kolejnymi chwilami próbkowania są stałe, np. równe T_s , to mówimy, że próbkowanie jest **równomierne** o okresie T_s lub o szybkości $f_s = 1/T_s$.

W przeciwnym wypadku mamy do czynienia z **próbkowaniem nierównomiernym**. Jeśli sekwencje różnych odstępów próbkowania powtarzają się, to jest to próbkowanie nierównomierne okresowe, czyli tzw. **próbkowanie heteromeryczne**. Taki rodzaj próbkowania jest stosowany np. w technice radarowej. W naszych rozważaniach ograniczymy się jednak wyłącznie do rozpatrywania procesu próbkowania równomiernego.

Proces próbkowania

Szybkość próbkowania

Nasuwa się pytanie: jak szybko należy próbkować, aby otrzymać sygnał dyskretny, który dostatecznie dokładnie reprezentuje oryginalny sygnał ciągły?

Jeśli wybierzemy zbyt krótki okres próbkowania, to proces przetwarzania sygnału będzie mało efektywny i drogi.

Jeśli okres próbkowania będzie zbyt długi, to utracimy część informacji zawartej w sygnale.

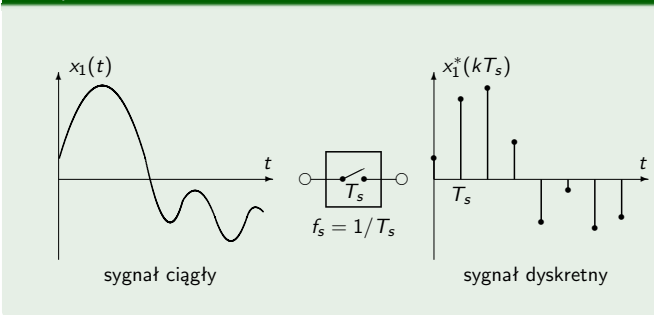
Wniosek: sygnał powinien być tym szybciej próbkowany, im szybszym ulega zmianom, tzn. im wyższe zawiera składowe częstotliwościowe.

Uwaga

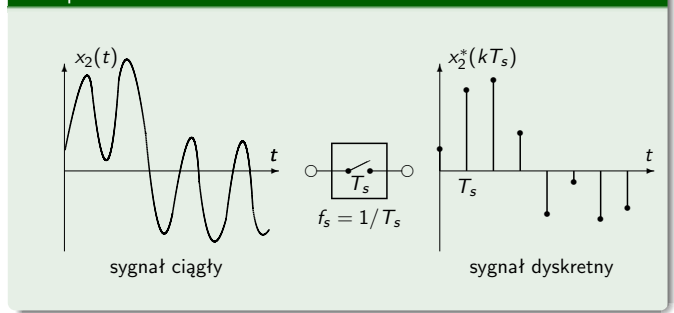
Aby określić ilościową zależność między częstotliwościami składowych sygnału (ściślej — charakterem jego widma), a wymaganą szybkością próbkowania, musimy zbadać model matematyczny procesu próbkowania.

Próbkowanie prawidłowe

Example

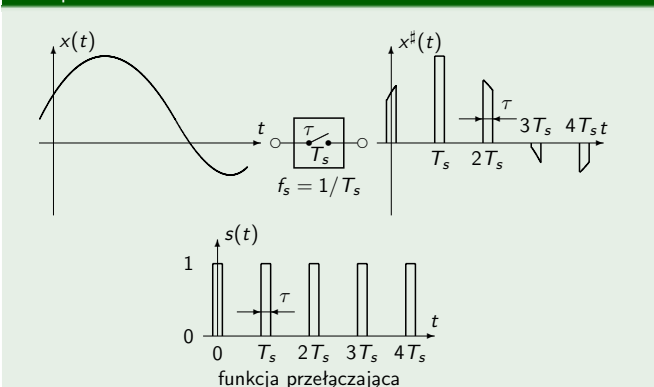


Example



Próbkowanie nieidealne o skończonym czasie τ

Example



Próbkowanie nieidealne o skończonym czasie τ

Próbkowanie jako modulacja iloczynowa

Zakładamy, że sygnał ciągły $x(t)$ jest próbkowany za pomocą łącznika zamykanego na czas τ co okres T_s . Przebieg pracy łącznika można opisać za pomocą ciągu impulsów prostokątnych, tj. tzw. **funkcji przełączającej** $s(t)$, a otrzymany sygnał dyskretny $x^d(t)$ — wyrazić wzorem^a

$$x^d(t) = x(t)s(t)$$

^aZnak „*” oznacza próbkowanie idealne ($\tau = 0$), a znak „#” — nieidealne ($\tau > 0$).

Uwaga

Z powyższej zależności wynika, że proces próbkowania może być interpretowany jako proces **modulacji iloczynowej**.

Sygnałem nośnym jest ciąg impulsów prostokątnych $s(t)$. Jest on modulowany **sygnałem modulującym** $x(t)$.

Ponieważ sygnał $s(t)$ jest okresowy, można go rozłożyć w szereg Fouriera.

Szereg Fouriera funkcji przełączającej $s(t)$

Rozkład w szereg Fouriera

Okresowy sygnał $s(t)$ można rozłożyć w szereg Fouriera o postaci

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t} \text{ przy czym } \omega_s = 2\pi/T_s$$

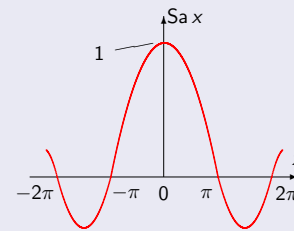
Współczynniki c_n oblicza się ze wzoru

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} s(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \cdot e^{-jn\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \frac{1}{(-jn\omega_s)} \left(e^{-jn\omega_s \tau/2} - e^{jn\omega_s \tau/2} \right) = \frac{1}{T_s} \frac{1}{n\omega_s/2} \frac{e^{jn\omega_s \tau/2} - e^{-jn\omega_s \tau/2}}{2j} \\ &= \frac{1}{T_s} \frac{1}{n\omega_s/2} \sin(n\omega_s \tau/2) = \frac{\tau}{T_s} \frac{1}{n\omega_s \tau/2} \sin(n\omega_s \tau/2) = \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}(n\omega_s \tau/2) \end{aligned}$$

Szereg Fouriera funkcji przełączającej $s(t)$

Funkcja próbkująca $\text{Sa}(x)$

Funkcję $\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$ oznaczaną również jako $\text{sinc } x$ nazywa się **funkcją próbkującą**



Szereg Fouriera funkcji przełączającej $s(t)$

Funkcja próbkująca $\text{Sa}(x)$

Współczynniki Fouriera c_n funkcji przełączającej $s(t)$ są wyrażone wzorem

$$c_n = \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}(n\omega_s \tau/2) = \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(n\pi \frac{\tau}{T_s}\right) = \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)$$

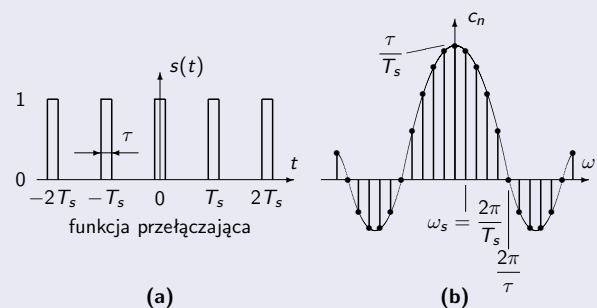
przy czym $\omega = n\omega_s$.

Wnioski

- odległości między prążkami c_n są równe $\omega_s = 2\pi/T_s$
- w otoczeniu pulsacji $\omega = 0$ funkcja próbkująca $\text{Sa}\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)$ przechodzi przez 0 w punktach $\pm 2\pi/\tau$
- w otoczeniu pulsacji $\omega = 0$ występuje $2\lceil T_s/\tau - 1 \rceil + 1$ dodatnich prążków, przy czym $\lceil x \rceil$ oznacza przybliżenie liczby x do najbliższej liczby naturalnej w górę.

Szereg Fouriera funkcji przełączającej $s(t)$

(a) przebieg funkcji $s(t)$, (b) współczynniki szeregu Fouriera



Widmo sygnału spróbkowanego

Widmo sygnału spróbkowanego $x^\#(t)$

Sygnał spróbkowany możemy wyrazić wzorem

$$x^\#(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t}$$

Interpretacja procesu próbkowania jako procesu modulacji nasuwa przypuszczenie, że w wyniku próbkowania powstają nowe składowe w widmie sygnału (produkty modulacji). Aby zbadać to zjawisko, założymy, że sygnał ciągły $x(t)$ ma skończoną energię. Sygnał spróbkowany $x^\#(t)$ ma wówczas także skończoną energię. Zatem

$$X^\#(j\omega) = \mathcal{F}\{x^\#(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^\#(t) e^{-j\omega t} dt$$

Widmo sygnału spróbkowanego

Widmo $X^\#(j\omega)$

Otrzymujemy wyrażenie

$$X^\#(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t} \right) e^{-j\omega t} dt,$$

które po zamianie kolejności całkowania i sumowania przyjmuje postać

$$X^\#(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - n\omega_s)t} dt$$

lub ostatecznie

$$X^\#(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n X(j(\omega - n\omega_s)).$$

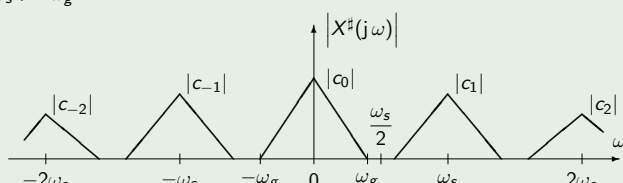
Widmo sygnału spróbkowanego

Twierdzenie

Widmo sygnału spróbkowanego powstaje z widma sygnału ciągłego przez sumowanie (z wagami równymi współczynnikiem szeregu Fouriera funkcji przełączającej) translacji tego widma w odstępach równych częstotliwości próbkowania.

Example

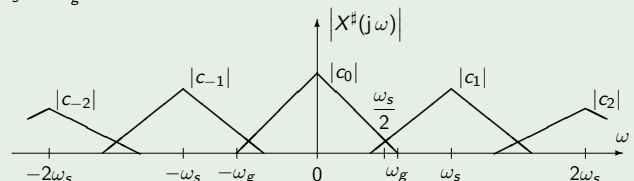
$\omega_s > 2\omega_g$



Widmo sygnału spróbkowanego

Example

$\omega_s < 2\omega_g$



Uwaga

Powtórzenia widma sygnału ciągłego w widmie sygnału spróbkowanego nazywano barwnie „aliasami” tego podstawowego widma, a zjawisko nakładania się poszczególnych widm, co zachodzi, gdy $\omega_g > \omega_s/2$, nazywano „aliasingiem”.

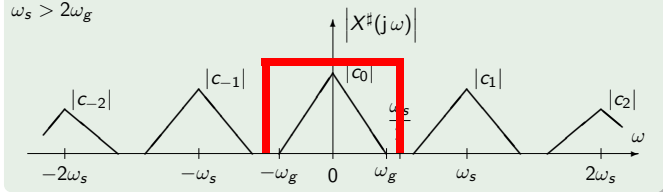
Odtworzenie sygnału ciągłego

Uwaga 1

Aliasing uniemożliwia odtworzenie sygnału ciągłego z sygnału dyskretnego.

Example

$$\omega_s > 2\omega_g$$



Uwaga 2

Przy braku aliasingu odtworzenie sygnału ciągłego z sygnału dyskretnego jest możliwe z pomocą filtra dolnoprzepustowego.

Twierdzenie o próbkowaniu

Twierdzenie

Częstość próbkowania ω_s musi być co najmniej dwa razy większa od maksymalnej pulsacji ω_g w widmie sygnału ciągłego, aby sygnał ten można było odtworzyć z sygnału spróbkowanego:

$$\omega_s \geq 2\omega_g.$$

Uwagi

- Maksymalna dopuszczalna w widmie sygnału ciągłego pulsacja $\omega_s/2$ nosi nazwę pulsacji Nyquista (częstotliwości Nyquista).
- Minimalna szybkość próbkowania równa $2\omega_g$, przy czym przez ω_g oznaczono maksymalną pulsację w widmie sygnału ciągłego, nosi nazwę szybkości próbkowania Nyquista.

Twierdzenie o próbkowaniu

Harry Nyquist



Harry Nyquist urodził się 7. lutego 1889 r. w Nilsby w Szwecji. W 1907 r. wyemigrował do USA. W 1912 r. rozpoczął studia na Uniwersytecie w Północnej Dakocie. Stopień doktora fizyki uzyskał w 1917 r. w Uniwersytecie w Yale. Następnie pracował jako inżynier w Bell Laboratories. Zmarł 4. kwietnia 1976 r. w Harlingen, Texas, USA.

Twierdzenie o próbkowaniu

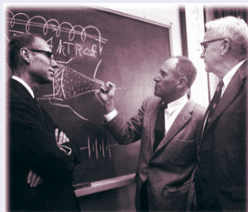
Harry Nyquist

Jego najbardziej znane osiągnięcia wywodzą się z prac nad stabilnością wzmacniaczy elektronicznych ze sprzężeniem zwrotnym (kryterium stabilności Nyquista), nad badaniem szumów termicznych w układach elektronicznych (szum Johnsona–Nyquista) oraz nad szybkością transmisji danych w systemach telegraficznych, co zapoczątkowało rozwój teorii informacji oraz teorii cyfrowego przetwarzania sygnałów. W 1927 r. Nyquist udowodnił, że szybkość transmisji niezależnych impulsów przez kanał transmisyjny jest ograniczona do podwójnej szerokości pasma tego kanału **szybkość Nyquista**². To twierdzenie jest dualne do twierdzenia o próbkowaniu.

²H. Nyquist, Certain topics in telegraph transmission theory, *Trans. AIEE*, vol. 47, Apr. 1928, pp. 617–644, reprint as classic paper in: *Proc. IEEE*, Vol. 90, No. 2, Feb. 2002

Harry Nyquist

Pierce, Kompfner, Nyquist

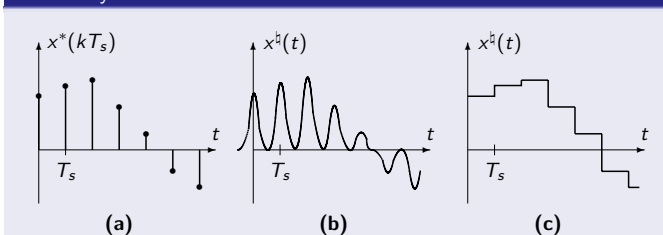


Na zdjęciu wykonanym w Bell Laboratories w 1960 r. Harry Nyquist stoi po prawej stronie i dyskutuje z Johnem R. Piercem (z lewej strony) i z Rudolfem Kompfnerem (w środku) na temat budowy lampy z falą bieżącą, służącej do wzmacniania sygnałów mikrofalowych stosowanych w technikach transmisji satelitarnej.

„Rozmycie” impulsów próbek

Sygnały spróbkowane:

(a) sygnał idealny $x^*(kT_s)$, (b) sygnał „rozmyty”, (c) sygnał schodkowy



Pobieranie próbek sygnału

„Rozmycie” impulsu próbki

Do tej pory rozważaliśmy nieidealny proces próbkowania uwzględniając, że łącznik próbkujący ma niezerowy czas włączenia (próbkowania) τ . Nie jest to jednak jedyną nieidealność rzeczywistego procesu próbkowania. Drugim efektem, który rozważymy, jest „rozmycie” impulsu próbki. Jeśli bowiem założymy nawet, że czas pobierania próbki sygnału jest zerowy ($\tau = 0$), to nie jesteśmy w stanie odebrać (zarejestrować) nieskończenie krótkich impulsów. Rzeczywiste impulsy są rozmyte po przejściu przez tor pobierania próbek. Najczęściej zresztą celowo je „rozmywamy” stosując układy próbkująco-pamiętające. Wówczas przebiegi reprezentujące próbki są impulsami prostokątnymi, a odbierany sygnał spróbkowany $x^s(t)$ ma charakter funkcji schodkowej².

²Symbol „s” wprowadzono w celu odróżnienia sygnału $x^s(t)$ od sygnału $x^b(t)$.

Analiza „rozmycia” impulsów próbek

Rozmyty impuls $q(t)$

W celu analitycznego opisu sygnału $x^b(t)$ zakładamy, że każdej próbce $x^*(nT_s)$ odpowiada rozmyty impuls o kształcie pewnego przebiegu $q(t)$, tzn.

$$x^b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT_s)q(t - nT_s).$$

Zakładamy, że przebieg $q(t)$ ma skończoną energię. Istnieje zatem transformata Fouriera

$$Q(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)e^{-j\omega t} dt$$

oraz

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Widmo $X^h(j\omega)$

Obliczmy widmo sygnału $x^h(t)$

$$\begin{aligned} X^h(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^h(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT_s)q(t-nT_s)e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT_s) \int_{-\infty}^{\infty} q(t-nT_s)e^{-j\omega t} e^{j\omega nT_s} e^{-j\omega nT_s} dt \quad (1) \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT_s)e^{-j\omega nT_s} \right) Q(j\omega) = X^*(e^{j\omega T_s})Q(j\omega), \end{aligned}$$

przy czym wprowadzono oznaczenie

$$X^*(e^{j\omega T_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT_s)e^{-j\omega nT_s}.$$

$$\text{Widmo } X^*(e^{j\omega T_s}) = X^*(e^{j\Omega})$$

Funkcja $X^*(e^{j\omega T_s})$ zależy wyłącznie od idealnie spróbkowanego sygnału $x^*(nT_s)$ zatem powinna być traktowana jako widmo tego sygnału.

$$X^*(e^{j\omega T_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT_s)e^{-j\omega nT_s}.$$

Zamiennie posługiwać się będziemy również znormalizowaną pulsacją sygnału spróbkowanego, oznaczaną dużą literą Ω i równą $\Omega = \omega T_s$. Jednocześnie możemy również znormalizować jednostkę czasu w taki sposób, że $T_s = 1$. Wówczas

$$X^*(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\Omega n}.$$

Grzebień impulsów Diraca

Zauważmy, że jeśli założymy, że proces próbkowania jest idealny, to możemy przyjąć, że

$$\begin{aligned} q(t) &= \delta(t) \quad \text{czyli} \\ x^h(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT_s)\delta(t-nT_s), \end{aligned}$$

przy czym przez $\delta(t)$ oznaczono impuls Diraca, to

$$X^*(e^{j\omega T_s}) = X^h(j\omega),$$

ponieważ $Q(j\omega) = \mathcal{F}(\delta(t)) = 1$.

Transformata Fouriera idealnie spróbkowanego sygnału dyskretnego jest więc widmem grzebienia impulsów Diraca pomnożonych przez kolejne próbki sygnału.

„Odwroćcie kota ogonem”

Na przekształcenie Fouriera sygnału dyskretnego wyrażone wzorem

$$X^*(e^{j\omega T_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT_s)e^{-j\omega nT_s}$$

możemy spojrzeć jak na rozkład funkcji $X^*(e^{j\omega T_s})$ w szereg Fouriera, w którym ω jest zmienną niezależną (analogonem czasu), n — numerem „harmonicznej”, T_s — analogonem pulsacji „pierwszej harmonicznej”, $\omega_s = 2\pi/T_s$ — okresem funkcji $X^*(e^{j\omega T_s})$. Zatem

$$x^*(nT_s) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} X^*(e^{j\omega T_s})e^{j\omega nT_s} d\omega$$

Dyskretnoczasowe przekształcenie Fouriera

Proste i odwrotne przekształcenie Fouriera sygnału dyskretnego to

$$\begin{aligned} X^*(e^{j\omega T_s}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT_s)e^{-j\omega nT_s}, \\ x^*(nT_s) &= \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} X^*(e^{j\omega T_s})e^{j\omega nT_s} d\omega \end{aligned}$$

lub inaczej

$$\begin{aligned} X^*(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}, \\ x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega. \end{aligned}$$

Wyrażenia te określają tzw. **dyskretnoczasowe przekształcenie Fouriera**.

Dyskretnoczasowe przekształcenie Fouriera

- **Proste dyskretnoczasowe przekształcenie Fouriera** oznacza się jako DtFT,
- **odwrotne dyskretnoczasowe przekształcenie Fouriera** oznacza się jako IDtFT,
- przekształceń tych nie należy mylić z **dyskretnym przekształceniem Fouriera (DFT)** oraz **odwrotnym dyskretnym przekształceniem Fouriera (IDFT)**.

Związek między wielkościami $X^*(e^{j\omega T_s})$ i $X(j\omega)$

Zajmiemy się teraz określeniem związku między wielkościami $X^*(e^{j\omega T_s})$ i $X(j\omega)$. Próbkki

$$x_n = x^*(nT_s) = x(nT_s)$$

sygnału $x(t)$ można wyrazić dwoma sposobami:

- stosując „klasyczne” odwrotne przekształcenie Fouriera widma $X(j\omega)$ w chwilach $t = nT_s$

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega nT_s} d\omega$$

- korzystając z odwrotnego przekształcenia Fouriera sygnału dyskretnego $x^*(nT_s) = x_n$.

Związek między wielkościami $X^*(e^{j\omega T_s})$ i $X(j\omega)$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega nT_s} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{\nu\omega_s-\omega_s/2}^{\nu\omega_s+\omega_s/2} X(j\omega)e^{j\omega nT_s} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} X(j(\omega+\nu\omega_s))e^{j(\omega+\nu\omega_s)nT_s} d\omega \\ &= \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_s}{2\pi} X(j(\omega+\nu\omega_s))e^{j\omega nT_s} d\omega. \end{aligned}$$

Po zmianie oznaczenia indeksu ν oznaczeniem $-n$ uzyskuje się poszukiwany związek w postaci

$$X^*(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - n\omega_s)).$$

Przekształcenie Fouriera sygnału dyskretnego

Związek między wielkościami $X^*(e^{j\omega T_s})$ i $X(j\omega)$

Wyrażenie

$$X^*(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - n\omega_s)).$$

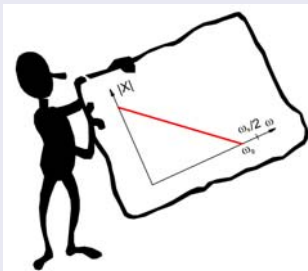
różni się od otrzymanego poprzednio przy założeniu skończonego czasu τ pozyskiwania próbek

$$X^\sharp(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n X(j(\omega - n\omega_s)).$$

tym, że wszystkie wagi c_n są w nim równe wartości $c_n = 1/T_s$. Odpowiada to założeniu, że funkcja przełączająca jest grzebieniem impulsów Diraca.

Dwie interpretacje własności widma sygnału dyskretnego

Interpretacja fizyczna



Maksymalna pulsacja ω_g obserwowana w widmie sygnału dyskretnego nie może przekroczyć wartości $\omega_s/2$; szybkość próbkowania to $f_s = \omega_s/(2\pi)$.

Własności widma sygnału dyskretnego

Uwaga



Jeśli sygnał jest rzeczywisty, to widmo amplitudowe jest funkcją parzystą. Jeśli ponadto sygnał jest parzysty, to widmo fazowe jest równe zeru. Wówczas oś częstotliwości „jest złożona w zygzak”.

Twierdzenie o próbkowaniu

Historia twierdzenia o próbkowaniu

Obecnie zajmujemy się uściśleniem twierdzenia o próbkowaniu, podanego poprzednio w formie opisowej. Jest to jedno z najważniejszych twierdzeń w teorii przetwarzania sygnałów dyskretnych. Zostało ono odkryte przez Whittakera w 1915 r. na gruncie teorii interpolacji^a. W formie przydatnej do zagadnień przetwarzania sygnałów zostało sformułowane^b przez Kotelnikowa w 1933 r. Jego doniosłość w teorii przetwarzania sygnałów uznano jednak dopiero dzięki fundamentalnej pracy^c Shannona z 1949 r.

^aE. T. Whittaker, On the functions which are represented by the expansion of interpolating theory, *Proc. Roy. Soc. Edinburg*, Vol. 25, 1915, 181–194.

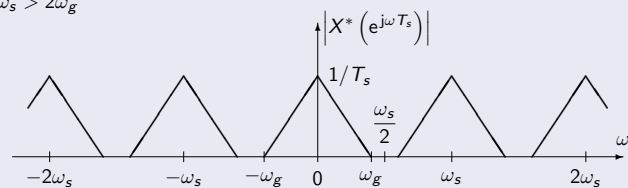
^bV. A. Kotelnikov, On the transmission capacity of „ether” and wire in electrocommunications, *Material for the First all-Union Conf. Questions of Comm.*, Izd. Red. Upr. Sviazi RSKA, Moskwa 1933.

^cC. E. Shannon, Communication in the presence of noise, *Proc. IRE*, Vol. 37, No. 1, 1949, 10–21.

Przekształcenie Fouriera sygnału dyskretnego

Widmo sygnału idealnie spróbkowanego

$\omega_s > 2\omega_g$

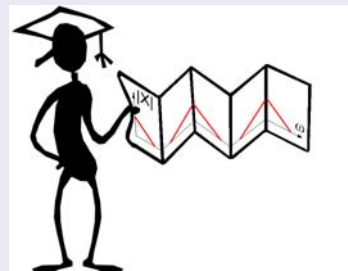


Twierdzenie

Widmo sygnału idealnie spróbkowanego jest okresowe i powstaje z widma sygnału ciągłego przez sumowanie (z wagami równymi $1/T_s$) translacji tego widma w odstępach równych częstotliwości próbkowania ω_s .

Dwie interpretacje własności widma sygnału dyskretnego

Interpretacja matematyczna



Nie ma maksymalnej pulsacji w widmie sygnału dyskretnego, ale widmo to jest okresowe, a okresem jest $\omega_s = 2\pi f_s$; f_s to szybkość próbkowania.

Własności widma sygnału dyskretnego

Uwaga

- Jeśli sygnał jest zespolony, to widmo nadal pozostaje okresowe z okresem ω_s , ale wewnątrz tego okresu nie musi być symetrii.
- Jeśli dodatkowo widmo sygnału ciągłego jest skończone (co jest warunkiem koniecznym na to, aby nie zachodził aliasing), to sygnał dyskretny ma nieskończenie wiele niezerowych próbek rozciągających się od $-\infty$ do $+\infty$.

Twierdzenie o próbkowaniu

Edmund Taylor Whittaker



Edmund Taylor Whittaker urodził się 24. października 1873 r. w Manchesterze w Wielkiej Brytanii. W latach 1906–1911 był Królewskim Astronomem Irlandii. Był także profesorem astronomii w Trinity College w Dublinie. Zmarł w Edynburgu w Szkocji 24. marca 1956 r. Zajmował się matematyką stosowaną i analizą numeryczną.

Twierdzenie o próbkowaniu

Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov



Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov urodził się w Kazaniu 6. września 1908 r. W latach 1926–31 studiował telekomunikację w Moskiewskim Instytucie Energetyki. W latach 1941–80 był profesorem tej uczelni. W 1953 r. został członkiem Rosyjskiej Akademii Nauk. Zmarł w Moskwie 11. lutego 2005 r. Zajmował się teorią sygnałów i radiokomunikacją. Pierwszy sformułował twierdzenie o próbkowaniu w teorii sygnałów.

Twierdzenie o próbkowaniu

Claude Elwood Shannon



Claude Elwood Shannon urodził się 30. kwietnia 1916 r. w Petoskey, Michigan, USA. Był dalekim krewnym Thomasa Edisona. W 1932 r. rozpoczął studia na Uniwersytecie w Michigan a od 1936 r. kontynuował je w Massachusetts Institute of Technology (MIT) w Bostonie.

Twierdzenie o próbkowaniu

Claude Elwood Shannon



Na zdjęciu: C. E. Shannon z jego sławną inteligentną myszą Tezeuszem.

W 1940 r. C. E. Shannon obronił rozprawę doktorską. Następnie pracował w Bell Laboratories. W 1956 r. wrócił do MIT jako profesor. C. E. Shannon był jednym z najbardziej znakomych uczonych XX wieku. Jest ojcem teorii informacji, nauk informacyjnych i decyzyjnych, sztucznej inteligencji, teorii cyfrowego przetwarzania sygnałów i genetyki. Hobbystycznie tworzył programy do gry w szachy. Pod koniec życia cierpiał na chorobę Alzheimera. Zmarł 24. lutego 2001 r.

Twierdzenie o próbkowaniu

Twierdzenie Whittakera-Kotelnikova-Shannona

Niech $x(t)$ będzie sygnałem o transformacie Fouriera $X(j\omega)$, przy czym

$$X(j\omega) = 0 \text{ dla } |\omega| > \omega_g,$$

wówczas

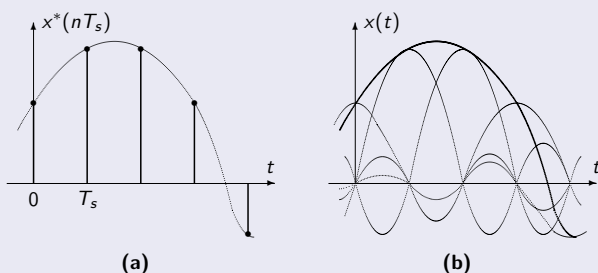
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\sin \omega_g(t - nT_s)}{\omega_g(t - nT_s)},$$

przy czym

$$\omega_s = 2\omega_g \text{ oraz } T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}.$$

Twierdzenie o próbkowaniu

Interpretacja graficzna formuły interpolacyjnej



(a) sygnał dyskretny $x^*(nT_s)$ (b) rekonstrukcja sygnału ciągłego

Twierdzenie o próbkowaniu

Interpretacja formuły interpolacyjnej

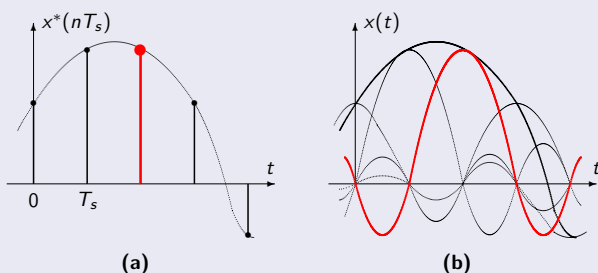
Z formuły interpolacyjnej wynika, że sygnał ciągły można otrzymać na podstawie dyskretnego sygnału spróbkowanego w wyniku superpozycji funkcji postaci

$$\text{Sa } x = \frac{\sin x}{x},$$

które są przesuwane o wielokrotności okresu próbkowania T_s i ważone przez wartości kolejnych próbek sygnału. Słuszność formuły interpolacyjnej w chwilach próbkowania jest oczywista. Istotnie, w każdej chwili próbkowania wszystkie funkcje $\sin x/x$ są równe zero z wyjątkiem jednej, która jest przesunięta do tego właśnie punktu na osi czasu i przyjmuje w nim wartość 1, co, po uwzględnieniu wagi równej wartości odpowiedniej próbki, jest, przy założeniu idealnego próbkowania, wartością sygnału ciągłego w tej chwili. Wykazanie słuszności formuły interpolacyjnej w pozostałych chwilach czasu wymaga jednak bardziej skomplikowanego dowodu.

Twierdzenie o próbkowaniu

Interpretacja graficzna formuły interpolacyjnej



(a) sygnał dyskretny $x^*(nT_s)$ (b) rekonstrukcja sygnału ciągłego

Twierdzenie o próbkowaniu

Dowód, część pierwsza

Zauważmy, że widmo sygnału ciągłego może być odtworzone z widma sygnału dyskretnego za pomocą idealnego filtra dolnoprzepustowego o charakterystyce $G(j\omega)$ określonej jako

$$G(j\omega) = \begin{cases} T_s & \text{dla } |\omega| \leq \omega_g \\ 0 & \text{dla } |\omega| > \omega_g \end{cases}.$$

Widmo sygnału na wyjściu filtra dolnoprzepustowego jest równe

$$X(j\omega) = X^*(e^{j\omega T_s}) G(j\omega)$$

i po uwzględnieniu wzoru określającego DtFT można je zapisać w postaci

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT_s) G(j\omega) e^{-j\omega nT_s}.$$

Twierdzenie o próbkowaniu

Dowód, część druga

Sygnał $x(t)$ uzyskamy teraz za pomocą odwrotnego przekształcenia Fouriera

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT_s) G(j\omega) e^{-j\omega n T_s} e^{j\omega t} d\omega.$$

Po zmianie kolejności całkowania i sumowania oraz uwzględnieniu charakterystyki filtru uzyskuje się

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT_s) \int_{-\omega_g}^{\omega_g} T_s e^{j\omega(t-nT_s)} d\omega.$$

Po obliczeniu całki otrzymuje się formułę interpolacyjną, co kończy dowód twierdzenia.

Uzupełnienie dowodu twierdzenia o próbkowaniu

Obliczenie całki

W dowodzie twierdzenia o próbkowaniu otrzymaliśmy wzór

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \int_{-\omega_g}^{\omega_g} T_s e^{j\omega(t-nT_s)} d\omega.$$

Występującą w nim całkę obliczamy następująco

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} T_s e^{j\omega(t-nT_s)} d\omega &= \frac{T_s}{j(t-nT_s)} \left(e^{j\omega_g(t-nT_s)} - e^{-j\omega_g(t-nT_s)} \right) \\ &= 2\pi \frac{2}{\omega_s(t-nT_s)} \left(\frac{e^{j\omega_g(t-nT_s)} - e^{-j\omega_g(t-nT_s)}}{2j} \right) \\ &= 2\pi \frac{\sin \omega_g(t-nT_s)}{\omega_g(t-nT_s)} \\ &= 2\pi \text{Sa} \omega_g(t-nT_s). \end{aligned}$$

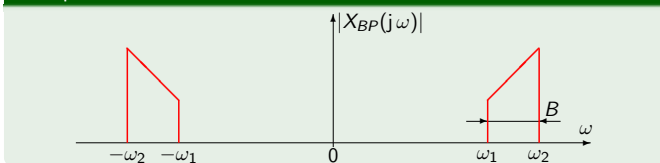
Próbkowanie sygnałów pasmowych

Sygnał pasmowy

Sygnał, którego widmo leży w przedziale (ω_1, ω_2) — ewentualnie $(-\omega_2, -\omega_1)$ i w obu tych pasmach (jeśli jest np. sygnałem rzeczywistym, co zakładamy) — jest nazywany sygnałem pasmowym.

Widmo takiego sygnału jest ograniczone przez pulsację ω_2 . Jeśli więc będziemy go próbować z pulsacją $\omega_s > 2\omega_2$, to na podstawie twierdzenia o próbkowaniu możemy go prawidłowo zrekonstruować z tak otrzymanego sygnału dyskretnego. Nie jest to jednak efektywny sposób próbkowania.

Example



Próbkowanie sygnałów pasmowych

Sygnał pasmowy

Być może jest możliwe odtworzenie sygnału pasmowego z sygnału dyskretnego także i przy mniejszych szybkościach próbkowania. Przecież sygnał dolnopasmowy o pulsacji granicznej B , przy czym

$$B = \omega_2 - \omega_1,$$

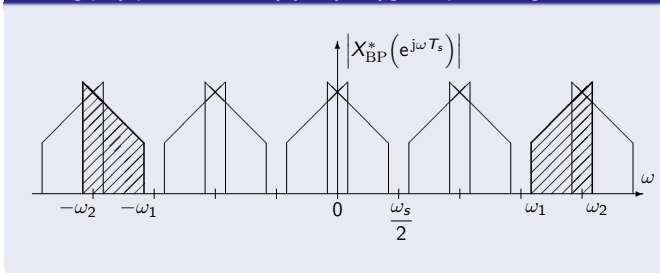
przenosi tyle samo informacji co rozważany sygnał pasmowy, a może być próbkowany z ω_2/B -razy mniejszą tzw. **krytyczną szybkością próbkowania**.

$$\omega_s = 2B = 2(\omega_2 - \omega_1) < 2\omega_2.$$

Równomierne próbkowanie sygnału pasmowego z tak małą szybkością nie zawsze jest możliwe, bo może prowadzić do (nieodtworzalnego) aliasingu. Nie ma to jednak miejsca w przypadku, gdy obie pulsacje ω_1 i ω_2 są kolejnymi wielokrotnościami pulsacji $\omega_s/2$. Takie sygnały, nazywane **sygnałami całkowitopasmowymi**, można próbować z szybkością krytyczną.

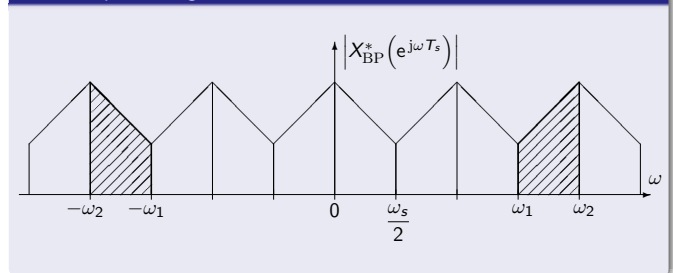
Próbkowanie sygnałów pasmowych

Aliasing przy próbkowaniu krytycznym sygnału pasmowego



Próbkowanie sygnałów pasmowych

Brak aliasingu przy próbkowaniu krytycznym sygnału całkowitopasmowego



Rekonstrukcja sygnału ciągłego

Układ pamiętający zamiast idealnego filtru dolnoprzepustowego

W dowodzie twierdzenia o próbkowaniu posłużyliśmy się idealnym filtrem dolnoprzepustowym do dokładnej rekonstrukcji sygnału ciągłego z sygnału dyskretnego. Taka metoda nie może być jednak wykorzystana w praktyce, bo choć istnieje poprawny model matematyczny idealnego filtru dolnoprzepustowego, to nie jest to układ realizowalny. **Idealny filtr dolnoprzepustowy jest bowiem układem nieprzyczynowym** — na wymuszenie impulsowe, np. w chwili $t = 0$, zaczyna reagować wcześniej, bo już w chwili $t = -\infty$.

Możemy co prawda aproksymować idealny filtr dolnoprzepustowy z dowolną dokładnością, ale taka metoda byłaby droga i mało efektywna.

Lepsze ujęcie polega na zastosowaniu układu pamiętającego wartość danej próbki do czasu pojawienia się następczej, co prowadzi do powstania analogowego sygnału schodkowego. Sygnał schodkowy może następnie być wygładzony za pomocą dużo prostszego filtru dolnoprzepustowego.

Rekonstrukcja sygnału ciągłego

Układ pamiętający jako filtr dolnoprzepustowy

Układ pamiętający, generujący sygnał schodkowy, jest w istocie również filtrem dolnoprzepustowym. Jego odpowiedź impulsowa ma postać

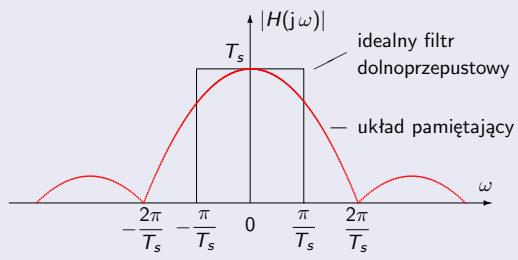
$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{przy } 0 \leq t < T_s \\ 0 & \text{w innych chwilach} \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy transmitancję układu pamiętającego

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = T_s e^{-j\omega T_s/2} \frac{\sin(\omega T_s/2)}{\omega T_s/2}.$$

Układ ten, wskutek istotnego odchylenia jego charakterystyki od charakterystyki idealnego filtru dolnoprzepustowego, wprowadza jednak zniekształcenie widma sygnału — tzw. **zniekształcenie $\sin x/x$** .

Charakterystyka amplitudowa układu pamiętającego



Korekcja $\sin x/x$

Efekt zniekształcenia $\sin x/x$ można zmniejszać zwiększając szybkość próbkowania, czyli zmniejszając rozmiar schodków, a zatem korzystając z mniej zniekształcającej części charakterystyki układu pamiętającego. Lepszą metodą jest jednak wstępne skorygowanie sygnału dyskretnego filtrem o charakterystyce $H^{-1}(j\omega)$ (tzw. **korekcja $\sin x/x$**), a następnie dopiero zastosowanie układu pamiętającego i filtra wygładzającego.

